

TD de Physique 3 (Série 1)

Exercice 1

Deux particules sont situés à un instant donné en $\vec{r}_1 = 4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 8\vec{e}_z$ et
 $\vec{r}_2 = 2\vec{e}_x + 10\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$,

- 1- Ecrire l'expression du déplacement \vec{r} de la particule 2 par rapport à la particule 1
- 2- Utiliser le produit scalaire pour trouver la longueur de chaque vecteur.
- 3- Calculer la projection de \vec{r} sur \vec{r}_1

Exercice 2

Soit un parallélépipède dont les arêtes sont décrites par $\vec{r}_1 = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y$, $\vec{r}_2 = 4\vec{e}_y$
et $\vec{r}_3 = \vec{e}_x + 3\vec{e}_z$ à partir de l'origine. Trouver le volume de ce parallélépipède.

Exercice 3

Etant donné 3 vecteurs \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} , exprimés dans la base cartésienne.

- 1- Calculer les composantes du double produit vectoriel $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$
- 2- En déduire la relation : $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$
- 3- Retrouver la relation : $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$

Exercice 4

Dans le système cartésien, on donne le vecteur $\vec{V} = (1, 2, 3)$ dont la direction passe par le point A (3, 4, 2).

Calculer son moment par rapport à l'origine et par rapport aux trois axes du système cartésien.

Exercice 5

Soient $\vec{r}_1 (r_1, \theta_1, \varphi_1)$, et $\vec{r}_2 (r_2, \theta_2, \varphi_2)$, deux vecteurs quelconques. Montrer que l'angle θ_{12} entre \vec{r}_1 et \vec{r}_2 est donné par : $\cos \theta_{12} = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2$
Calculer la longueur de $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Exercice 6

Soient les vecteurs : $\vec{OA} = 5 \vec{e}_x + 4 \vec{e}_y - 7 \vec{e}_z$, $\vec{OB} = -3 \vec{e}_x + 3 \vec{e}_y + 6 \vec{e}_z$ et $\vec{OC} = 5 \vec{e}_x + 4 \vec{e}_y + 7 \vec{e}_z$
Exprimés dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

Par une manipulation directe, déterminer s'il y'a une différence entre :

- les produits vectoriels : $\vec{OA} \wedge (\vec{OB} \wedge \vec{OC})$ et $(\vec{OA} \wedge \vec{OB}) \wedge \vec{OC}$
- les produits mixtes : $\vec{OA} \cdot (\vec{OB} \wedge \vec{OC})$, $(\vec{OA} \wedge \vec{OB}) \cdot \vec{OC}$ et $(\vec{OC} \wedge \vec{OA}) \cdot \vec{OB}$

Exercice 7

On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\ddot{X} - \omega^2 X = \cos \alpha \quad (1) \quad \omega \text{ est une cste positive}$$

Où α est un paramètre constant.

- 1- Trouver la solution de l'équation différentielle sans second membre de (1)
- 2- Montrer que cette solution peut se mettre sous la forme :

$$X(t) = B_1 \cosh \omega t + B_2 \sinh \omega t$$

Où B_1 et B_2 sont des constantes

- 3- Chercher la solution générale de l'équation (1), en utilisant les conditions initiales suivantes :

$$\text{A } t=0, X=0 \text{ et } \dot{X} = 0$$

TD. Physique 3 : série 1.

Ex 1:

2. l'expression du déplacement \vec{r} de la particule 2% à 1.

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ &= (2\vec{e}_x + 10\vec{e}_y + 5\vec{e}_z) - (4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 8\vec{e}_z) \\ &= (-2\vec{e}_x + 7\vec{e}_y - 3\vec{e}_z)\end{aligned}$$

2 - on sait que $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 = \|\vec{r}_1\|^2$

$$\|\vec{r}_1\| = \sqrt{89} = 9,43$$

$$\|\vec{r}_2\| = \sqrt{129} = 11,36$$

3. la projection de \vec{r} sur \vec{r}_1

$x = \vec{r} \cdot \vec{e}_{r_1}$ où \vec{e}_{r_1} est le vecteur unitaire associé au vecteur \vec{r}_1

$$\vec{e}_{r_1} = \frac{\vec{r}_1}{\|\vec{r}_1\|} \Rightarrow x = \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}_1}{\|\vec{r}_1\|} \Rightarrow x = \frac{-11}{9,43} = -1,66.$$

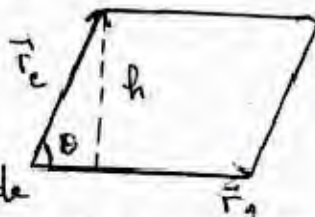
Ex 2.

Rappel: le produit vect :

Le mode $(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)$ est tt simplement l'air du parallélogramme formé par les vecteurs \vec{r}_1 et \vec{r}_2

En effet.

$$\|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2\| = r_1 r_2 \sin \theta$$



Le volume d'un parallépipède formé par $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ est : $\vec{r}_3 \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)$,

en considérant que \vec{r}_1 et \vec{r}_2 forment la base

En effet.

$$V = r_3 \cdot w \cdot \cos(\vec{r}_3 \cdot \vec{w}) = w r_3 \cos \alpha.$$

Calcul du volume $V = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

Ex 4:

$$\vec{M}_O(\vec{v}) = \vec{OA} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\vec{M}_{Ox}(\vec{r}) = \vec{i} \cdot \vec{M}_O(\vec{r}) = 8 \quad (\theta \in \theta x)$
- $\vec{M}_{Oy}(\vec{r}) = \vec{j} \cdot \vec{M}_O(\vec{r}) = -4$
- $\vec{M}_{Oz}(\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{M}_O(\vec{r}) = 2$

Ex 3:

1- $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\vec{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k}$$

$$\vec{B} \wedge \vec{C} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \vec{i}(B_y C_z - B_z C_y) - \vec{j}(B_x C_z - B_z C_x) + \vec{k}(B_x C_y - B_y C_x)$$

$$\vec{B} \wedge \vec{C} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}(A_y z - y A_z) - \vec{j}(z A_x - x A_z) + \vec{k}(y A_x - x A_y)$$

2- $\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

$$= \vec{B}(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - \vec{C}(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)$$

⇒ En remplaçant \vec{B} et \vec{C} par leurs exp. on trouve après des manipulations

la question trouvée en 1)

3- $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = -\vec{C} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = -[\vec{A} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A})]$$

$$= \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{B})$$

$$= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

Ex 5:

$$\vec{r}_1(r_1, \theta_1, \varphi_1) \quad \vec{r}_2(r_2, \theta_2, \varphi_2)$$

on rappelle que:

$$x_1 = r_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1$$

$$y_1 = r_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1$$

$$z_1 = r_1 \cos \theta_1$$

$$x_2 = r_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2$$

$$y_2 = r_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2$$

$$z_2 = r_2 \cos \theta_2$$

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = r_1 r_2 \cos \theta_{12}$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$+ r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2$$

$$= r_1 r_2 (\sin \theta_1 \sin \theta_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) +$$

$$r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 = r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$$

$$r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 = r_1 r_2 \cos \theta_{12}$$

$$\Rightarrow \cos \theta_{12} = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2$$

$$\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| = ?$$

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (x_1 - x_2) \vec{i} + (y_1 - y_2) \vec{j} + (z_1 - z_2) \vec{k}$$

$$\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

$$= (r_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1 - r_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2)^2 + (r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2)^2$$

$$= r_1^2 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \varphi_1 + r_2^2 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \varphi_2 - 2 r_1 r_2 \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2$$

$$+ r_1^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \varphi_1 + r_2^2 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \varphi_2 - 2 r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_2 \sin \varphi_2$$

$$+ r_1^2 \cos^2 \theta_1 + r_2^2 \cos^2 \theta_2 - 2 r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2$$

$$= r_1^2 \sin^2 \theta_1 + r_2^2 \sin^2 \theta_2 - 2 r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + r_1^2 \cos^2 \theta_1 +$$

$$r_2^2 \cos^2 \theta_2 - 2 r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2)$$

$$\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos \theta_{12}}$$

Ex 1

$$\ddot{x} - \omega^2 x = \cos \alpha \quad (1)$$

$$r^2 - \omega^2 = 0 \Rightarrow r_1 = \omega, \quad r_2 = -\omega$$

$$\text{Donc } x_{ssm}(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$$

$$2-Mg \quad x_{ssm}(t) = B_1 \operatorname{ch} \omega t + B_2 \operatorname{sh} \omega t$$

$$\operatorname{ch} \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$$

$$\operatorname{sh} \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$$

$$\operatorname{sh} \omega t + \operatorname{sh} \omega t = e^{\omega t}$$

$$\operatorname{ch} \omega t - \operatorname{sh} \omega t = e^{-\omega t}$$

$$\star \text{ Alors } x_{ssm}(t) = A(\operatorname{ch} \omega t + \operatorname{sh} \omega t) + B(\operatorname{ch} \omega t - \operatorname{sh} \omega t)$$

$$= (A+B) \operatorname{ch} \omega t + (A-B) \operatorname{sh} \omega t = B_1 \operatorname{ch} \omega t + B_2 \operatorname{sh} \omega t$$

$$\text{Avec } B_1 = A+B \text{ et } B_2 = A-B$$

$$\text{on sait que: } x_g(t) = x_{ssm}(t) + x_p(t) \quad \text{alors:}$$

$$x_g(t) = B_1 \operatorname{ch} \omega t + B_2 \operatorname{sh} \omega t - \frac{\cos \alpha}{\omega^2} \quad / \quad x_p = -\frac{\cos \alpha}{\omega^2}$$

$$\text{on cherche. mnt } B_1 \text{ et } B_2 \text{ selon } x(0) = 0 \text{ et } \dot{x}(0) = 0$$

$$\bar{a} \quad t = 0.$$

$$B_1 \cdot \operatorname{ch}(0) + B_2 \operatorname{sh}(0) - \frac{\cos \alpha}{\omega^2} = 0$$

$$\Rightarrow B_1 - \frac{\cos \alpha}{\omega^2} = 0 \Rightarrow B_1 = \frac{\cos \alpha}{\omega^2} \text{ et}$$

$$\dot{x}(t) = B_1 \omega \operatorname{sh} \omega t + B_2 \omega \operatorname{ch} \omega t$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B_2 = 0$$

$$\text{Alors } x_g(t) = \frac{\cos \alpha}{\omega^2}$$

Ex 2.

$$\frac{dx}{dt} - e^{t+x} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^{t+x}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t \cdot e^x \Rightarrow \frac{dx}{e^x} = e^t dt$$

$$\Rightarrow \int e^{-x} dx = \int e^t dt \Rightarrow -e^{-x} = e^t + C$$

$$\Rightarrow e^{-x} = -e^t + C_1$$

$$\Rightarrow \ln(e^{-x}) = \ln(-e^t + C_1)$$

$$2) \frac{dx}{dt} + x - e^t + 1 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} + x f(t) = g(t)$$

$$\frac{dx}{dt} + x - e^t + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} + x = e^t - 1$$

on résoud d'eq. ssm: $\frac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int -dt$

$$\Rightarrow \ln x = -t + C$$

$$\Rightarrow x = e^{-t+C} = \lambda e^{-t}$$

La nouvelle fct. $x(t)$:

$$x(t) = \lambda(t) \cdot e^{-t} \Rightarrow (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(\lambda(t) \cdot e^{-t})}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d\lambda(t)}{dt} e^{-t} - \lambda(t) \cdot e^{-t}$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} e^{-t} = e^t - 1$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = e^t (e^t - 1) \Rightarrow \lambda(t) = \int e^{2t} - e^t$$

$$\Rightarrow \lambda(t) = \frac{1}{2} e^{2t} - e^t + C \Rightarrow x(t) = \left(\frac{1}{2} e^{2t} - e^t + C \right) e^{-t}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} e^t + C e^{-t} - 1$$

$$3) t \frac{dx}{dt} + 2x e^t, \text{ l'eq. ssm} \Rightarrow x(t) = \frac{C}{t^2 e}$$

Après application de la méthode de la variation de la cte. et en utilisant les cond. initiales. $x(t) = \frac{e^t (t-1)}{t^2}$

$$4) \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = \sin t$$

on résoud d'eq. ssm. $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 0$

$$r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow r = 1 \text{ ou } r = -2$$

$$x(t) = a e^t + b e^{-2t}$$

$$x_p(t) = a \cos t + b \sin t$$

$$\frac{dx_p}{dt} = -a \sin t + b \cos t \Rightarrow \frac{d^2 x_p}{dt^2} = -a \cos t - b \sin t$$

$$= -(b + 3a) \sin t + (a - 3b) \cos t = \sin t$$

$$a = 3b \quad \left\{ \begin{array}{l} -b - 3a = 1 \\ a - 3b = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{-3}{10} \\ b = \frac{-1}{10} \end{array} \right.$$

$$\frac{-3}{10} \sin t - \frac{1}{10} \cos t$$

la générale est $x_g(t) = A e^t + B e^{-2t} - \frac{3}{10} \sin t - \frac{1}{10} \cos t$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

$$x(t) = \frac{1}{6} e^t - \frac{1}{15} e^{-2t}$$

Series 23

Ex 1:

$$\vec{z} = e^{-t} \vec{i} + 5 \sin t \vec{j} - 3 \cos t \vec{k}$$

$$\text{At } t=0 \quad \vec{OM} = \vec{i} + 3\vec{k}$$

$$\vec{V}_0 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

$$\vec{z} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt} \vec{i} + \frac{dV_y}{dt} \vec{j} + \frac{dV_z}{dt} \vec{k}$$

$$\frac{dV_x}{dt} = e^{-t} \Rightarrow V_x = \int e^{-t} = -e^{-t} + 2$$

$$V_y = 5 \int \sin t = -5 \cos t + 2, \quad C = 2$$

$$V_z = -3 \int \cos t = -3 \sin t + C, \quad C = -1$$

$$\vec{V} = (-e^{-t} + 2) \vec{i} + (-5 \cos t + 2) \vec{j} - (3 \sin t + 1) \vec{k}$$

$$\text{on a } V_x = -e^{-t} + 2$$

$$V_y = -5 \cos t + 2 \Rightarrow V_z = -3 \sin t - 1$$

$$\Rightarrow x = \int (-e^{-t} + 2) dt = e^{-t} + 2t + 1$$

$$\Rightarrow y = \int -5 \cos t + 2 dt + y_0$$

$$y = -5 \sin t + 2t$$

$$z = \int (-3 \sin t - 1) dt = 3 \cos t - t + C, \quad C = 0$$

done:

$$\vec{OM} = (-e^{-t} + 2t + 1) \vec{i} + (-5 \sin t + 2t) \vec{j} - (3 \cos t - t) \vec{k}$$



ETU SUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..